SÉRIES DE FOURIER

Le but de ce module est d'étudier et exploiter la décomposition de signaux périodiques en séries de Fourier. Ce module est à mener en liaison étroite avec les enseignements des autres disciplines : les séries de Fourier sont un outil indispensable pour l'étude des phénomènes vibratoires en électricité, en optique et en mécanique.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Exemples de séries numériques		
Séries géométriques : convergence, somme.	• Reconnaître une série géométrique et connaître la condition de convergence.	L'étude de ces deux exemples a pour objectifs : – de familiariser les étudiants avec les «sommes infinies» et la notation Σ ; – d'introduire la notion de convergence et de somme d'une série numérique. Toute théorie générale sur les séries numériques est exclue.
Séries de Riemann : convergence.	• Connaître la condition de convergence d'une série de Riemann.	L'outil informatique est utilisé pour conjecturer les résultats concernant les séries de Riemann. Ces résultats sont admis.
Séries de Fourier		
Série de Fourier associée à une fonction T-périodique continue par morceaux sur R : $a_0 + \sum_{n \geq 1} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right).$	• Représenter graphiquement une fonction T-périodique continue par morceaux sur R.	En liaison avec les autres disciplines, on met en valeur le lien entre la notion de série de Fourier et l'étude des signaux : composantes d'un signal dans une fréquence donnée, reconstitution du signal à partir de ses composantes, spectre.
	• Exploiter la représentation graphique d'une fonction T-périodique affine par morceaux pour en déterminer : – la périodicité ; – la parité ; – une expression sur une période ou une demi-période.	On montre l'intérêt d'exploiter, dans le calcul intégral, les propriétés des fonctions périodiques, des fonctions paires et des fonctions impaires.
	• Calculer les coefficients de Fourier d'une fonction : – à la main dans le cas d'un signal en créneau ; – à l'aide d'un logiciel de calcul formel dans tous les cas.	En complément, on traite à la main un exemple de calculs de coefficients de Fourier d'une fonction associée à un signal rampe pour faire comprendre les résultats fournis par les logiciels dans d'autres

Cas d'une fonction paire, impaire.		disciplines. C'est l'occasion de réinvestir les techniques de calcul intégral. En liaison avec les méthodes vues dans les autres disciplines, on montre qu'il peut être utile de se ramener à des fonctions paires ou impaires.
Convergence d'une série de Fourier lorsque *f* est de classe C^1 par morceaux sur R (conditions de Dirichlet). Formule de Parseval	• Représenter à l'aide d'un logiciel une somme partielle d'une série de Fourier et la comparer à la fonction associée au signal étudié. • Savoir identifier parmi plusieurs développements proposés celui correspondant à une fonction donnée. • Calculer et comparer : – la valeur exacte de $\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,\mathrm{d}t$; – une valeur approchée de $\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,\mathrm{d}t$ à l'aide des coefficients de Fourier de *f*.	L'utilisation de l'outil informatique permet de visualiser graphiquement la convergence de la série de Fourier. Aucune difficulté ne doit être soulevée sur la convergence des séries de Fourier. Dans les cas étudiés, les conditions de convergence sont toujours remplies. On met en relation la formule de Parseval et le calcul de la valeur efficace d'un signal. ⇆ Analyse harmonique d'un signal.