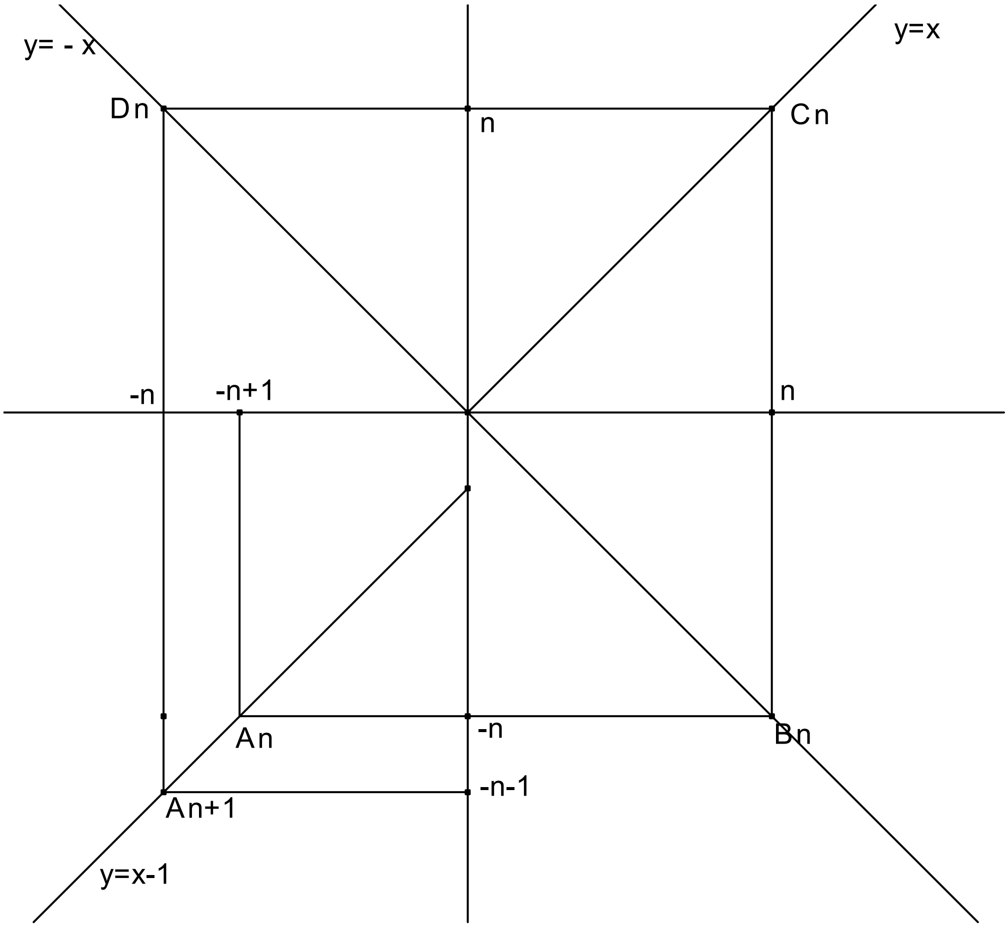
Exercice 1 : La « spirale »

Commençons par des considérations générales.



Notons que la spirale est une réunion de segments dont les sommets sont situés sur trois droites D_1 , D_2 et D_3 dont les équations sont simples à trouver, à savoir dans l'ordre où elles ont à intervenir : $y = x - 1\ (D_1)$, $y = -x\ (D_2)$ et $y = x\ (D_3)$.

Notons A_n le point de D_1 d'ordonnée $-n$: il a pour coordonnées : $(-n+1, -n)$.

B_n le point de D_2 d'ordonnée $-n$: il a pour coordonnées : $(n, -n)$.

C_n le point de D_3 d'ordonnée n : il a pour coordonnées : (n, n).

D_n le point de D_2 d'ordonnée n : il a pour coordonnées : $(-n, n)$.

La spirale n'est alors rien d'autre que la réunion pour $n \in \mathbb{N}^*$ des segments

$$[D_{n-1}A_n], [A_nB_n], [B_nC_n] \text{ et } [C_nD_n]$$

de longueurs respectives $2n-1$, $2n-1$, $2n$ et $2n$.

Le point O peut être considéré comme le point D_0.

On conjecture facilement que les points A_n et C_n ont sont tels que :

$$\boxed{l(A_n)=(2n-1)^2} \quad \text{et} \quad \boxed{l(C_n)=(2n)^2}$$

Démontrons-le :

$$l(A_n)=OA_1+A_1B_1+B_1C_1+C_1D_1+D_1A_2+\ldots+B_{n-1}C_{n-1}+C_{n-1}D_{n-1}+D_{n-1}A_n$$
$$=1+1+2+2+3+\ldots+(2n-2)+(2n-2)+(2n-1)$$
$$=2.\left(1+2+3+\ldots+(2n-2)\right)+\left(2n-1)\right)$$
$$=2.\frac{(2n-2)(2n-1)}{2}+\left(2n-1)\right)=(2n-2)(2n-1)+(2n-1)$$
$$=(2n-1)\left((2n-2)+1\right)=(2n-1)^2$$

et $l(C_n)=l(A_n)+A_nB_n+B_nC_n=(2n-1)^2+(2n-1)+2n=4n^2=(2n)^2$

1. Il existe deux points A de l'axe des abscisses tels que $OA=5$, l'un d'abscisse 5, l'autre d'abscisse -5.

   $\boxed{1^{\text{ier}} \text{ cas : } A(5,0)}$

   Ce point est sur le segment $\left[B_5C_5\right]$;

   en effet on a $B_5(5,-5)$ et $C_5(5,5)$ avec $AC_5=5$.

   Ainsi $l(A)=l\left(C_5\right)-5=10^2-5=\boxed{95}$.

   $\boxed{2^{\text{ième}} \text{ cas : } A'(-5,0)}$

   Ce point est sur le segment $\left[D_5A_6\right]$ $(D_5(-5,5)$, $A_6(-5,-6)$;) avec $A'A_6=6$.

   Ainsi $l(A')=l\left(A_6\right)-6=11^2-6=\boxed{115}$.

2. $B(2005,2006)$ est sur le segment $\left[C_{2006}D_{2006}\right]$;

   en effet on a $C_{2006}(2006,2006)$ et $D_5(-2006,2006)$ avec $C_{2006}B=1$.

   Ainsi $l(B)=l\left(C_{2006}\right)+1=4012^2+1=\boxed{16\ 096\ 145}$.

3. On cherche ici le point C tel que $l(C)=2006$.

   Or, la suite des nombres

   $$l(O)=0,\ l\left(A_1\right)=1,\ l\left(C_1\right)=4,\ l\left(A_2\right)=9,\ l\left(C_2\right)=16,\ldots,$$
   $$\ldots\ l\left(A_n\right)=(2n-1)^2,\ l\left(C_n\right)=(2n)^2$$

   est la suite des carrés des entiers naturels (ou « carrés parfaits »).

   Il suffit donc d'abord d'encadrer 2006 par deux carrés parfaits successifs :

   $$l\left(C_{22}\right)=44^2=1936<2006<2025=45^2=l\left(A_{23}\right).$$

   De plus $C_{22}D_{22}=44$ donc

   $$l\left(D_{22}\right)=1936+44=1980<2006<2025=45^2=l\left(A_{23}\right)$$

   donc $C\in\left[D_{22}A_{23}\right]$.

   Enfin : $2006-1980=26$ donc $\begin{cases} x_C=-22=x_{D_{22}}=x_{A_{23}} \\ y_c=x_{D_{22}}-26=22-26=-4 \end{cases}$

   Donc C a pour coordonnées $\boxed{(-22,-4)}$.

4. Soit $D(p,q)$ un point à coordonnées entières.
Eliminons immédiatement le cas où $p = q = 0$ auquel cas $D = O$.
Notons $n = \max(|p|,|q|)$.
$\boxed{\text{Si } n = |p|}$ alors $|q| \leq n$ donc $-n \leq q \leq n$ et $p \in \{-n,n\}$.
Si $p = n$ alors $D(n,q)$ avec $-n \leq q \leq n$ est sur le segment $[B_nC_n]$

$$\text{car } \begin{cases} x_{B_n} = x_D = n = x_{C_n} \\ y_{B_n} = -n \leq y_D \leq y_{C_n} = n \end{cases}$$

Si $p = -n$ alors $D(-n,q)$ avec $-n \leq q \leq n$ est sur le segment $[D_nA_{n+1}]$

$$\text{car } \begin{cases} x_{A_{n+1}} = x_D = -n = x_{D_n} \\ y_{A_{n+1}} = -n - 1 < -n \leq y_D \leq y_{D_n} = n \end{cases}$$

$\boxed{\text{Si } n \neq |p|}$ alors $|p| < |q| = \max(|p|,|q|) = n$:
par suite $|p| < n$ donc $-n < p < n$ et $q \in \{-n,n\}$.
Si $q = n$ alors $D(p,n)$ avec $-n < p < n$ est sur le segment $[C_nD_n]$

$$\text{car } \begin{cases} x_{D_n} = -n < x_D = p < n = x_{C_n} \\ y_{D_n} = y_D = n = y_{C_n} \end{cases}$$

Si $q = -n$ alors $D(p,-n)$ avec $-n < p < n$ est sur le segment $[A_nB_n]$

$$\text{car } \begin{cases} x_{A_n} = -n + 1 \leq x_D = p < n = x_{B_n} \\ y_{A_n} = y_D = -n = y_{B_n} \end{cases}$$

Ainsi <u>dans tous les cas *D* est sur un des segments qui constituent la spirale</u>.

Exercice 2 : les cylindres en papier

Commençons par des considérations générales qui serviront tout au long de l'exercice.

Pour un cylindre dont la hauteur est h, le rayon de base R et la surface de base B, la formule donnant le volume est : $V = B \times h = \pi R^2 h$.
Pour un cercle de rayon R, la formule donnant le périmètre est $p = 2\pi R$.
Si le cylindre est formé à partir d'un rectangle ou d'un parallélogramme de base a qu'on enroulera et de hauteur b qui sera aussi la hauteur du cylindre, on aura :

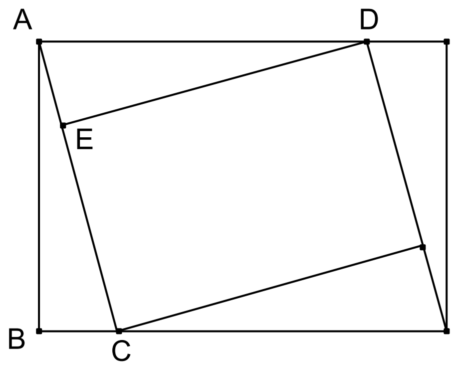
$$a = 2\pi R \quad \text{d'où} \quad R = \frac{a}{2\pi} \quad \text{puis} \quad V = \pi\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 b \quad \text{soit} \quad \boxed{V = \frac{1}{4\pi}a^2 b}.$$

1. Prenons une feuille de papier de 21 cm de large ($l = 21$) et 29,7 cm de long ($L = 29,7$)
   Notons $a = 21 = l$ et $b = 29,7 = L$.
   Selon la façon dont on roule la feuille pour obtenir un cylindre, le volume sera :
   $$\boxed{V_1 = \frac{1}{4\pi}L^2 l} \quad \text{ou} \quad \boxed{V_2 = \frac{1}{4\pi}l^2 L}$$
   Ainsi $\frac{V_1}{V_2} = \frac{L}{l}$ et comme $L \neq l$, il en découle que $\boxed{V_1 \neq V_2}$.
   Remarquons qu'<u>il n'est pas nécessaire d'effectuer des calculs pour conclure</u>.

2. Dans une feuille de papier de format A4, on enlève deux triangles de mêmes dimensions selon la figure donnée dans l'énoncé. Selon la façon dont on roule la feuille on obtient deux cylindres de tailles différentes.

   Pour le cylindre n°1, on a avec les notations précédentes :
   $$a = 29.7 - x = L - x \quad \text{et} \quad b = 21 = l \quad \text{d'où} \quad \boxed{V_1 = \frac{1}{4\pi}(L-x)^2 l}.$$

   Pour le cylindre n°2, on doit déjà calculer les valeurs de a et b.



   Or (cf figure) :
   $a = AC$ s'obtient en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle ABC. Il vient $AC^2 = AB^2 + BC^2 = l^2 + x^2$ d'où $a = AC = \sqrt{l^2 + x^2}$.

   Pour calculer $b = DE = h$, remarquons que les triangles ABC et DEA sont semblables.

Il vient : $\dfrac{DE}{AD}=\dfrac{AB}{AC}$ soit $\dfrac{b}{L-x}=\dfrac{l}{\sqrt{l^2+x^2}}$ d'où $b=\dfrac{l(L-x)}{\sqrt{l^2+x^2}}$

On a alors :

$V_1=\dfrac{1}{4\pi}\left(\sqrt{l^2+x^2}\right)^2\dfrac{l(L-x)}{\sqrt{l^2+x^2}}$ soit $\boxed{V_2=\dfrac{1}{4\pi}l(L-x)\sqrt{l^2+x^2}}$.

Par suite :

$$V_1=V_2 \Leftrightarrow \frac{1}{4\pi}(L-x)^2 l=\frac{1}{4\pi}l(L-x)\sqrt{l^2+x^2}$$

$$\Leftrightarrow (L-x)=\sqrt{l^2+x^2} \qquad \text{en simplifiant par } \frac{1}{4\pi}(L-x)l$$

$$\Leftrightarrow (L-x)^2=l^2+x^2$$

$$\Leftrightarrow L^2+x^2-2Lx=l^2+x^2$$

$$\Leftrightarrow L^2-2Lx=l^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x=\frac{L^2-l^2}{2L}}$$

Numériquement on obtient $L=29,7$ et $l=21$: $.x\approx 7.426$

soit $x\approx\dfrac{29.7}{4}=7.425$.

Autrement dit <u>il suffit de choisir pour x à peu près le quart de la longueur de la feuille</u>.

Le résultat peut sembler étonnant. Ce $\dfrac{1}{4}$ est-il un hasard ?

Démystifions…

En fait, le format $21\times 29,7$ a été choisi de manière à ce qu'on puisse réduire deux feuilles de papier A4 en une seule.

Ceci est possible si $\dfrac{2l}{L}=\dfrac{L}{l}$ soit $L=l\sqrt{2}$.

mais 29 n'est qu'une valeur approchée (certes très bonne) de $21\sqrt{2}$.

Si le format A4 était non 21×29.7 mais $21\times 21\sqrt{2}$ (peut-être l'est-il, il faudrait demander aux papetiers…) , l'exercice donnerait pur résultat :

$$x=\frac{L^2-l^2}{2L}=\frac{L^2-\frac{L^2}{2}}{2L}=\frac{L^2}{4L} \text{ soit } \boxed{x=\frac{L}{4}} \qquad \text{sic….}$$

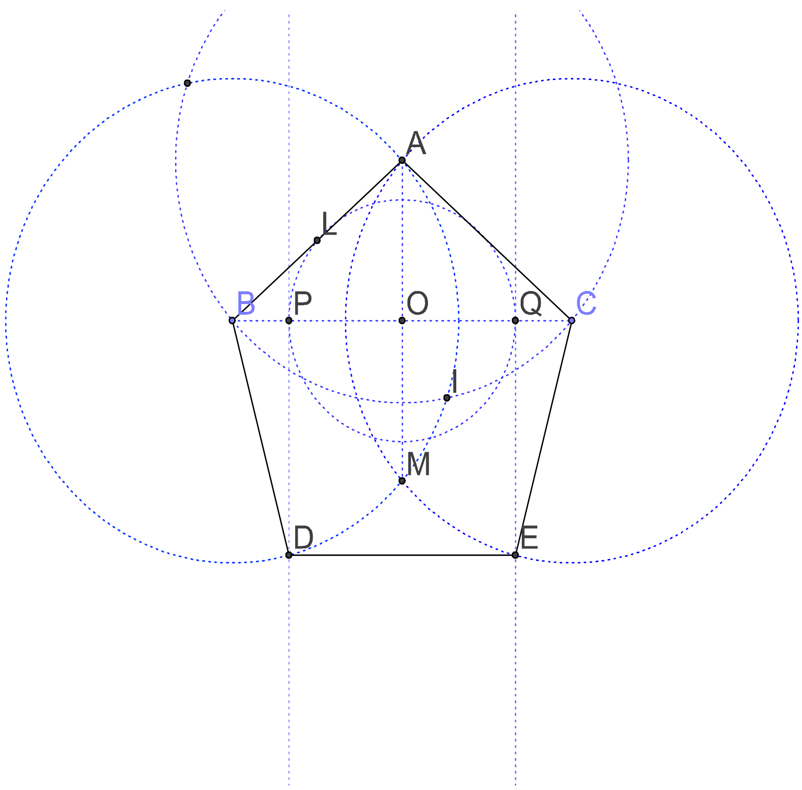
OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

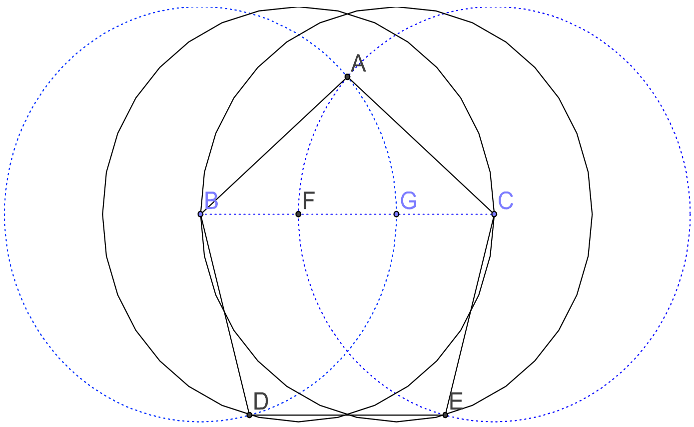
ACADEMIE D'ORLEANS-TOURS

EXERCICE 3

1°

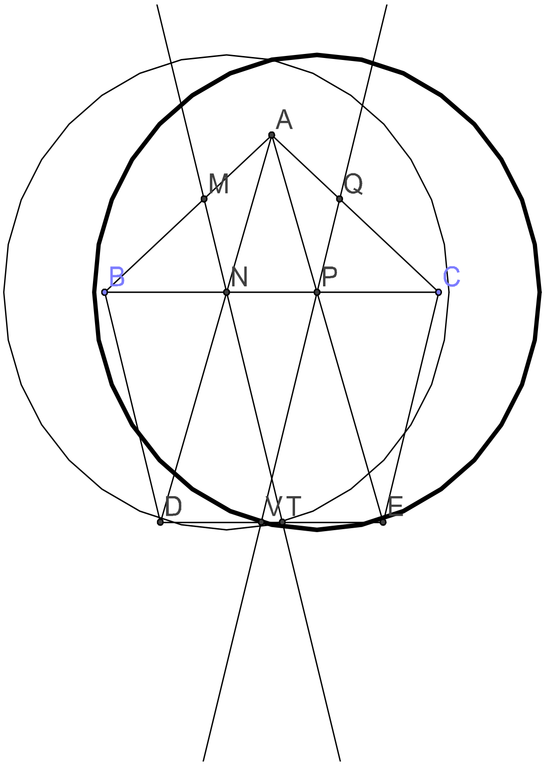
On commence par tracer la médiatrice de AB et de BC pour déterminer les milieux L de $[AB]$,et O de $[BC]$
On porte ensuite le point P sur le segment $[BO]$ tel que $OP = AL = AB/2$ et le point Q sur le segment $[O, C]$ tel que $OQ = AB/2$.
On trace les cercles C_1 de centre B et de rayon BA et C_2 de centre C et de rayon CA
On trace la perpendiculaire Δ en P à $[BC]$ et le point d'intersection D de C_1 et Δ
de même on trace la perpendiculaire Δ' en Q à $[BC]$ et le point d'intersection E de C_2 et Δ'
ainsi $PQED$ est un rectangle et donc $PQ = DE = AB$
donc on a bien $AB = BD = DE = EC = CA$





Autre solution: étant donné le triangle ABC , on trace le cercle C_1 de centre B et de rayon AB, ainsi que le cercle C_2 de centre C et de rayon AB
C_1 intersecte le segment $[BC]$ au point G.
supposons construits les points D et E
$BG//ED$ et $BG = ED$ donc la figure $BGED$ est un parallélogramme
En particulier $BD = GE = AB$
On trace alors le cercle C_3 de centre G et de rayon AB, qui doit contenir le point E
Donc E se trouve à l'intersection de C_2 et de C_3
Pour récupérer le point D, on procéde de la même facon en introduisant le point $F \in [BC]$ tel que $CF = AB$, et la cercle C_4 de centre F et de rayon AB; D est alors situé à l'intersection de C_4 et de C_1

2°



Traçons la droite (AD) qui rencontre (BC) en N. Traçons ensuite la droite passant par N et parallèle à (BD) :on peut par exemple construire le parallèlogramme $BDTN$ en traçant le cercle de centre N et de rayon BD qui rencontre DE en T

La droite (TN) rencontre la droite AB en M

De la même façon on trace la droite (AE) qui rencontre (BC) en P,puis le parallèlogramme $CPVE$ pour obtenir la droite passant par P et parallèle à (CE)

cette droite rencontre (AC) en Q

Démontrons que $AM = MN = NP = PQ = QA$

Le théorème de Thalès appliqué aux triangles ABD et AMN fournit:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD} \tag{1}$$

dans les triangles ADE et ANP :

$$\frac{NP}{DE} = \frac{AN}{AD} = \frac{AP}{AE} \tag{2}$$

dans les triangles ACE et APQ :

$$\frac{AP}{AE} = \frac{PQ}{CE} = \frac{AQ}{AC} \tag{3}$$

finalementd'après $(1), (2)$ et(3)

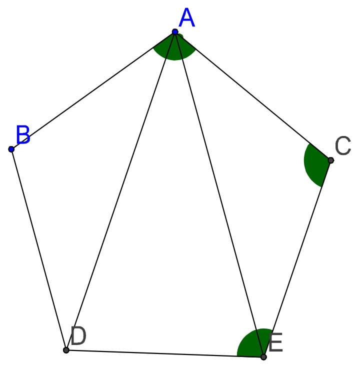
$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BD} = \frac{NP}{DE} = \frac{PQ}{CE} = \frac{AQ}{AC}$$

or

$$AB = BD = DE = EC = CA$$

donc

$$AM = MN = NP = PQ = QA$$



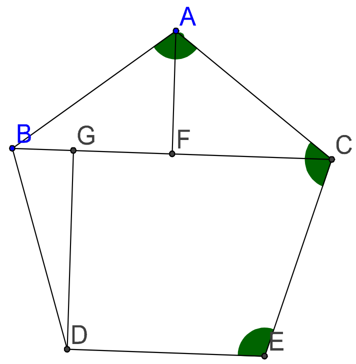
3° a)supposons les angles $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{D}, \widehat{E}, \widehat{C}$ égaux.
la somme des angles d'un triangle valant $180°$ on peut considérer les trois triangles ABD, ADE, AEC, dont la somme des angles vaut

$$540° = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{D} + \widehat{E} + \widehat{C} = 5\widehat{A}$$

Donc

$$\widehat{A} = \frac{540}{5} = 108° = \beta$$

on pose donc $\alpha = \frac{108}{3} = 36°$



soit F la projection orthogonale de A sur $[B, C]$ (F est le milieu de BC)
dans le triangle rectangle ABF, on a donc

$$\widehat{BAF} = \frac{\beta}{2} = 54°$$

donc

$$\widehat{ABF} = 90° - 54° = 36° = \alpha$$

on en déduit que $\widehat{CBD} = \beta - 36° = 3\alpha - \alpha = 2\alpha$

donc si G est la projection orthogonale de D sur AC, en remarquant que $GF = \frac{DE}{2}$.

$$\cos(2\alpha) = \frac{BG}{BD} = \frac{BF - \frac{1}{2}DE}{BD} = \frac{BF}{AB} - \frac{1}{2} = \cos\alpha - \frac{1}{2}$$

3°b) supposons $A = 108°$. La construction du 1° fournit

$$\cos(\widehat{CBD}) = \frac{BG}{BD} = \frac{BF - \frac{1}{2}DE}{BD} = \cos\alpha - \frac{1}{2} = \cos(2\alpha)$$

donc $\widehat{CBD} = 2\alpha$, et $\widehat{ABD} = 3\alpha = \beta$

par symétrie $\widehat{ACE} = \beta$, puis

$$\widehat{BDE} = (540° - 3\beta)/2 = (540° - 324°)/2 = 108° = \widehat{CED}$$

donc le pentagone $ABDEC$ est régulier puisque les cinq angles sont égaux.

EXERCICE 4

1. $10^0 = 1 = 0 \times 7 + 1, \qquad R_0 = 1$
   $10^1 = 10 = 1 \times 7 + 3, \qquad R_1 = 3$
   $10^2 = 100 = 14 \times 7 + 2, \qquad R_2 = 2$
   $10^3 = 1000 = 142 \times 7 + 6, \qquad R_3 = 6$
   $10^4 = 10000 = 1428 \times 7 + 4, \qquad R_4 = 4$
   $10^5 = 100000 = 14285 \times 7 + 5, \qquad R_5 = 5$
   $10^6 = 1000000 = 142857 \times 7 + 1, \qquad R_6 = 1$
   $10^7 = 10000000 = 1428571 \times 7 + 3 \qquad R_7 = 3$

2. supposons que $R_{24} = 1$: $\qquad 10^{24} = 7q + 1$, alors
   $$10^{25} = 70q + 10 = 70q + 1 \times 7 + 3 = 7(10q + 1) + 3 = 7q' + 3$$
   donc $R_{25} = 3$
   de même
   $$10^{26} = 700q' + 100 = 700q' + 14 \times 7 + 2 = 7(100q' + 14) + 2 = 7q'' + 2$$
   donc $R_{26} = 2$
   de même on peut écrire par exemple
   $$10^{29} = 10^5 10^{24} = 10^5(7q + 1) = 10^5 \times 7q + 14285 \times 7 + 5 = 7(10^5 q + 14285) + 5$$
   donc $R_{29} = 5$
   ce raisonnement permet ainsi de montrer que :
   $$R_{25} = 3, R_{26} = 2, R_{27} = 6, R_{28} = 4, R_{29} = 5, R_{30} = 1, R_{31} = 3$$
   On montre donc que si $R_p = 1$, alors lma suite des 6 restes suivants est : $(3, 2, 6, 4, 5, 1)$
   or $R_0 = 1$,R$_6 = 1$ donc $R_{12} = 1, R_{18} = 1$ et plus généralement $R_{6n} = 1$
   donc pour tout entier naturel n, on a
   $$R_{6n} = 1, R_{6n+1} = 3, R_{6n+2} = 2, R_{6n+3} = 6, R_{6n+4} = 4, R_{6n+5} = 5$$

3. $x = a10^n = a(7q + R_n) = 7aq + aR_n$
   notons $aR_n = 7q_1 + r$: ainsi r est le reste dans la division de aR_n par 7
   On a alors :
   $$x = 7aq + 7q_1 + r = 7(aq + q_1) + r$$
   donc le reste dans la division de x par 7 est égal à r

4. le reste r' dans la division de 310^n par 7 est donc le même que le reste dans la division de $3R_n$ par 7 : pour que $310^n - 1$ soit divisible par 7 il faut que le reste r' soit egal à 1
   or $3R_0 = 3 \rightarrow r' = 3$: $3R_1 = 9 \rightarrow r' = 2$: $3R_2 = 6 \rightarrow r' = 6$:
   $3R_3 = 18 \rightarrow r' = 4$: $3R_4 = 12 \rightarrow r' = 5$: $3R_5 = 15 \rightarrow r' = 1$
   $3R_6 = 3R_0 = 3 \rightarrow r' = 3$: on retrouve ainsi les valeurs obtenues précedemment
   le premier entier n tel que $3R_n$ admet pour reste 1 est donc $n = 5$
   le suivant est $n = 5 + 67 = 11$

5. (a) posons:

$$N = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + ... + a_1 10 + a_0$$

On a donc

$$N = a_n 10^n + (a_{n-1}10^{n-1} + ... + a_1 10 + a_0) = a_n 10^n + B$$

$$B = a_{n-1}10^{n-1} + ... + a_1 10 + a_0$$

d'ou par définition

$$\begin{aligned} f(N) &= a_{n-1}10^n + ... + a_1 100 + a_0 10 + a_n \\ &= 10(a_{n-1}10^{n-1} + ... + a_1 10 + a_0) + a_n \\ &= 10B + a_n \end{aligned}$$

(b) $f(N) = 3N$ ssi $10B + a_n = 3(a_n 10^n + B)$ ssi $a_n(3.10^n - 1) = 7B$
donc le produit $a_n(3.10^n - 1)$ doit être divisible par 7
7 est un nombre premier et $1 \leq a_n \leq 6$
donc $3.10^n - 1$ doit être divisible par 7.
Les deux plus petites valeurs de n possibles sont donc $n = 5$ et $n = 11$
on cherche un entier N avec le moins de chiffres possibles donc commençons par $n = 5$
si $n = 5$; $a_5(3.10^5 - 1) = 7B$
$3.10^5 - 1 = 7 \times 42857$ donc $a_5 \times 7 \times 42857 = 7B$ ssi $B = a_5 \times 42857$
pour $a_5 = 1$, $B = 42857$
pour $a_5 = 2$, $B = 85714$
au delà la valeur de B ne convient plus puisque B possèdera plus de 5 chiffres
nous avons exatement deux solutions à 6 chiffres;

$$N_1 = 142857 \text{ et } N_2 = 285714$$

vérification:

$$f(N_1) = 428571 = 3 \times 142857 \text{ et } f(N_2) = 857142 = 3 \times 285714$$