Académie Orléans-Tours

Olympiades Académiques de Mathématiques

Classe de Première

Mercredi 24 Mars 2004

Durée : 4 heures.

L'épreuve comporte quatre exercices indépendants.
L'usage des calculatrices est autorisé.

Exercice 1

On définit pour chaque couple de réels (a, b) la fonction f par :

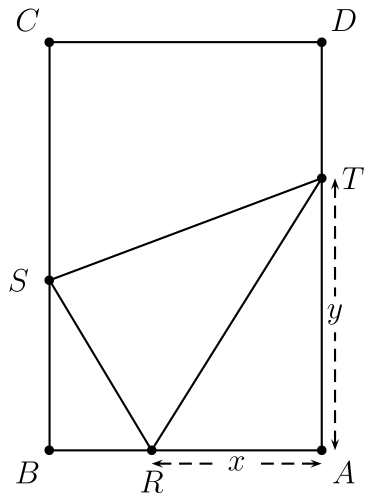
$$f(x) = a - \sqrt{x+b}.$$

Deux nombres réels u et v distincts sont dits *échangeables* s'il existe au moins un couple de réels (a, b) tel que la fonction f vérifie à la fois $f(u) = v$ et $f(v) = u$.

1. Montrer que 2 et 3 sont échangeables.
2. Peut-on en dire autant de 4 et 7 ?
3. À quelle condition deux <u>entiers</u> u et v sont-ils échangeables ?

Exercice 2

Soit $ABCD$ une feuille de papier rectangulaire de largeur $AB = 4$ et de longueur $BC = 6$.
Soit R un point de $[AB]$ (bord inférieur de la feuille) et T un point de $[AD]$ (bord droit de la feuille).
On replie la feuille suivant le segment $[RT]$ et on appelle S la nouvelle position du point A (coin inférieur droit de la feuille).
Voir figure ci-contre.
Dans tout l'exercice, on s'intéresse au cas où S est sur le segment $[BC]$ (bord gauche de la feuille).
On pose $AR = x$ et $AT = y$.



1. Trouver les valeurs minimale et maximale de x.
2. Trouver une relation entre x et y lorsque S se déplace sur $[BC]$.
3. Trouver la valeur de x pour laquelle l'aire de la partie repliée (triangle SRT) est minimale.

   Quelle est alors la nature du triangle AST ?

Exercice 3

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
2. Montrer qu'avec un choix judicieux de $+$ ou de $-$ à la place des $\pm$, on peut obtenir :

$$\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \cdots\cdots\cdots \pm 99 \pm 100 = 2004$$

3. Déterminer tous les entiers n pour lesquels on peut obtenir, selon le même principe :

$$\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \cdots\cdots\cdots \pm 99 \pm 100 = n$$

Exercice 4

1. Prouver que pour tous réels a et b, $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$
2. Étant donné un triangle ABC, on note $\mathscr{C}_1$ le cercle de centre A et passant par C et $\mathscr{C}_2$ le cercle de centre B et passant par C.
   Soit M un point de $\mathscr{C}_1$ distinct de C. La droite (MC) recoupe $\mathscr{C}_2$ en E.
   Construire M pour que le produit des distances $CM \cdot CE$ soit maximum.