2006

Épreuve officielle

Exercice n° 1 : (5 points)

Être ou ne pas être... premier

Le nombre $E = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 + 1$ est-il un nombre premier ?

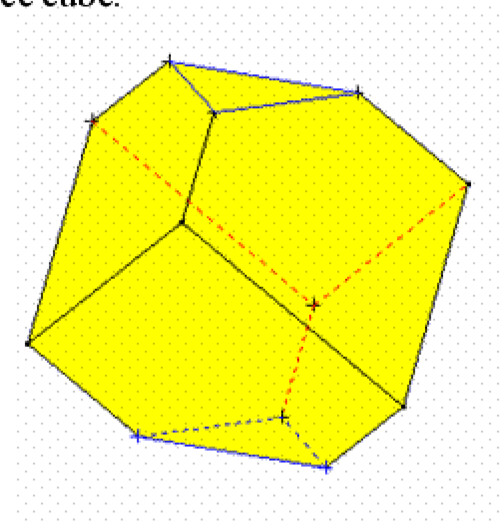
Même question pour

$F = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 + 1$ et $G = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 + 1$.

Exercice n° 2 : (5 points)

Le solide de Dürer

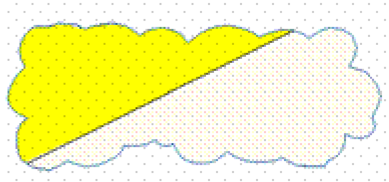
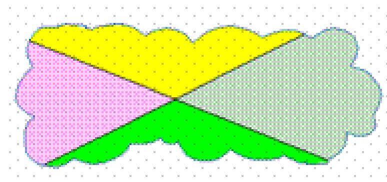
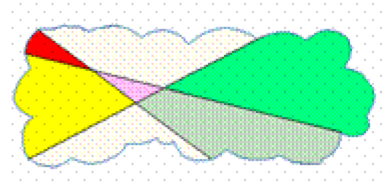
Dans sa gravure *Melencolia*, Dürer (1490) expose un solide. On considère dans cet exercice que ce solide est un cube tronqué par deux plans parallèles passant par les milieux de certaines arêtes. On a représenté ce solide par le dessin ci-dessous. Réaliser un patron de ce solide en choisissant 4 cm pour arête de ce cube.



Exercice n° 3 : (8 points)

Que de régions

Exemples

		
Une droite deux régions	Deux droites quatre régions	Trois droites sept régions

a) Quel est le plus grand nombre de *régions* que 4 droites peuvent déterminer dans un plan ? Faire le dessin.

b) Même question pour 5 droites. Faire le dessin.

c) Le plus grand nombre de *régions* que 10 droites peuvent déterminer dans un plan est 56. Indiquer une manière de calculer le plus grand nombre de *régions* que 11 droites peuvent déterminer dans un plan.

d) Imaginer une formule permettant de calculer en fonction de n le plus grand nombre de *régions* que n droites peuvent déterminer dans un plan ?

Exercice n° 4 : (8 points)

Somme toute

Avec le nombre 197 (qui est un nombre de *trois* chiffres) on commence l'énumération d'une suite de nombres entiers en écrivant les trois premiers nombres : 1 , 9, 7 . Pour continuer l'énumération, on calcule la somme des *trois* derniers nombres énumérés : 1 + 9 + 7. Le $4^{\text{éme}}$ nombre est donc 17. Le $5^{\text{éme}}$ nombre de l'énumération est 9 + 7 + 17 c'est-à-dire 33 et ainsi de suite.

1. Continuer l'énumération attendue en appliquant cette règle jusqu'au moment où va apparaître le nombre 197.

2. Mettre en œuvre cet algorithme en partant du nombre 742. Qu'observez-vous ?

3. On adapte l'algorithme aux nombres de *deux* chiffres. La nouvelle règle pour calculer un « suivant » consistera à calculer la somme des *deux* derniers nombres énumérés.

Déterminer parmi tous les nombres à *deux* chiffres ceux qui, en leur appliquant l'algorithme, possèdent la propriété analogue à celle de 197, c'est-à-dire qui réapparaissent à un certain moment dans l'énumération.

Exercice n° 5 : (5 points)

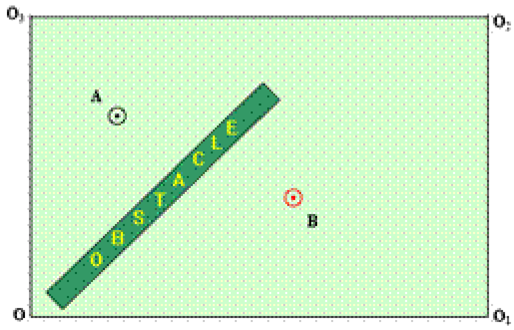
Le snooker

Rappel : Chaque fois qu'une bille rebondit sur le bord du billard, les droites supportant les trajectoires avant et après le rebond sont symétriques par rapport au bord du billard.

Les points O, O_1, O_2, O_3 forment un rectangle délimitant un billard.

Deux billes sont placées respectivement en A et B.

Un obstacle gêne le déplacement des billes.



1. La bille située en A peut-elle venir toucher directement celle en B ?

2. La bille située en A peut-elle venir toucher celle en B après rebond sur une seule bande ?

3. La bille située en A peut-elle venir toucher celle en B après deux rebonds successifs sur deux bandes ?

Les réponses à ces questions seront illustrées sur la feuille jointe en y traçant les trajectoires correspondantes. On utilisera des couleurs différentes. On laissera apparentes toutes les éventuelles constructions annexes.

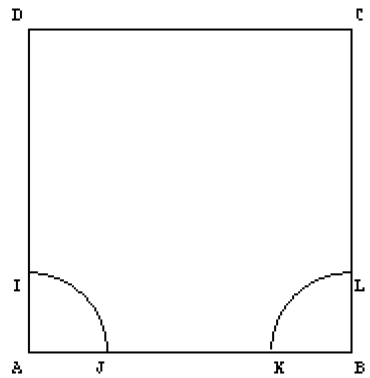
Exercice n° 6 : (5 points)

Le maxi disque

ABCD est un carré de côté 8 cm dans lequel on a tracé les quarts de cercle de centres A et B et de rayon 2 cm.

On a donc AI = AJ = BK = BL = 2 cm.

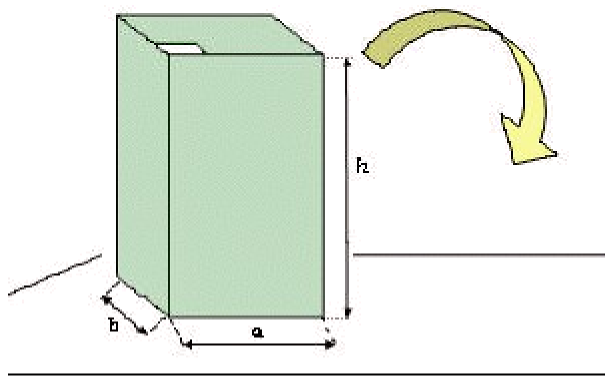
Déterminer le centre et le rayon du plus grand disque contenu dans le carré ABCD et tangent aux arcs de cercles $\overset{\frown}{IJ}$ et $\overset{\frown}{KL}$.



Exercice n° 7 : (5 points)

Un exercice bidonnant

Un bidon a une forme de parallélépipède. Il est posé verticalement sur l'une de ses faces de dimensions a et b avec $a > b$. L'autre dimension est la hauteur notée h.
La face supérieure est munie, dans l'un des coins, d'un orifice rectangulaire de dimensions $\frac{a}{10}$ et $\frac{b}{10}$, le côté de dimension $\frac{a}{10}$ est parallèle au côté de dimension a.
On verse un liquide dans le bidon. La hauteur du liquide dans le bidon est kh, k étant un nombre réel inférieur ou égal à 1 (si $k = \frac{1}{2}$ par exemple alors le bidon est à moitié plein).
Déterminer la plus grande valeur de k permettant de poser horizontalement le bidon sans que le liquide ne s'écoule par l'orifice.



Exercice n° 8 : (5 points)

2006 une grande année

Comment est constitué le plus petit nombre entier de 2006 chiffres dont la somme des chiffres est 2006 ?